

## TEMA 12 – INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

### 12.1 – CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

#### TASA DE VARIACIÓN MEDIA

##### Definición

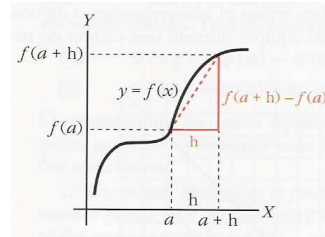
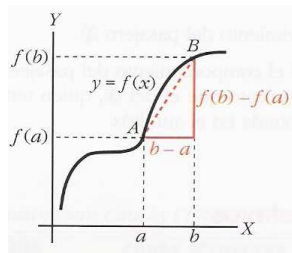
Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función,  $y = f(x)$  en un intervalo

$[a,b]$  al cociente:  $T.V.M.[a,b] = \frac{\text{Variación de } f(x)}{\text{Variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

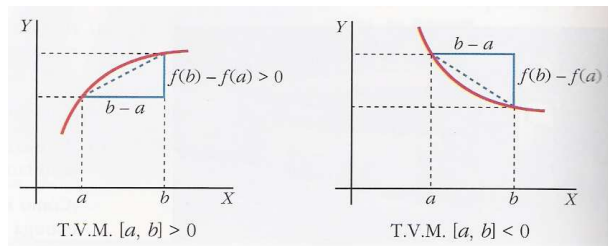
Y es la pendiente del segmento que une los puntos  $A(a,f(a))$  y  $B(b,f(b))$

Con frecuencia, el intervalo se le designa mediante la expresión  $[a,a+h]$ , nombrando, así, a un extremo del intervalo  $a$ , y a su longitud,  $h$ . En tal caso, la tasa de variación

media se obtiene :  $T.V.M. [a,a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$



Si una función es creciente en  $[a,b]$ , su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



#### TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

**Definición:** Se llama **tasa de variación instantánea (T.V.I)** de una función,  $y = f(x)$  en un punto  $a$

$$T.V.I.(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Y es la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $x = a$ .

##### Significado:

Si es positiva  $\Rightarrow$  La función es creciente en el punto  $a$

Si es negativa  $\Rightarrow$  La función es decreciente en el punto  $a$

## 12.2 – DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

### DEFINICIÓN

Llamaremos **derivada de una función  $y = f(x)$  en el punto  $x = a$**  a la tasa de variación instantánea de dicha función en el punto  $a$ , y se designa por  $f'(a)$ :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

### SIGNIFICADO

La derivada de la función  $y = f(x)$  en el punto  $x = a$  es **la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $x = a$**

Por tanto la ecuación de la recta tangente a una curva en el punto  $x = a$  :

$$y - f(a) = f'(a) (x - a)$$

### APLICACIONES

- Si  $f'(a) > 0 \Rightarrow$  La función es creciente en el punto  $x = a$
- Si  $f'(a) < 0 \Rightarrow$  La función es decreciente en el punto  $x = a$
- Si hay un máximo o mínimo relativo en  $x = a \Rightarrow f'(a) = 0$

## 12.3 – FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

Se llama **función derivada de  $f$**  (o simplemente **derivada de  $f$** ) a una función  $f'$  que asocia a cada abscisa,  $x$ , la derivada de  $f$  en ese punto,  $f'(x)$ , es decir, la pendiente de la curva  $y = f(x)$  en ese punto. A la derivada de  $f$  la llamaremos  $f'$  o  $Df$ :

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

## 12.4 – REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

### OPERACIONES CON DERIVADAS

- Multiplicación por un número :  $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
- Suma y resta :  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- Producto :  $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Cociente :  $\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- Composición :  $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**REGLAS DE DERIVACIÓN**

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \text{Ln } a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot \text{Ln } a \cdot f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \text{Ln } a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \text{Ln } a}$
$y = \text{Ln } x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \text{Ln } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen } x$	$y' = \text{cos } x$	$y = \text{sen } f(x)$	$y' = \text{cos } f(x) \cdot f'(x)$
$y = \text{cos } x$	$y' = -\text{sen } x$	$y = \text{cos } f(x)$	$y' = -\text{sen } f(x) \cdot f'(x)$
$y = \text{tag } x$	$y' = 1 + \text{tag}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$	$y = \text{tag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\text{cos}^2 f(x)} = [1 + \text{tag}^2 f(x)] \cdot f'(x)$
$y = \text{arcsen } x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arcsen } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arccos } x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arccos } f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arctag } x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \text{arctag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

**12.5 – UTILIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVADA****CALCULAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN VARIOS PUNTOS**

Para hallar  $f'(a)$  se calcula la expresión general de la derivada  $f'(x)$  y luego se sustituye en la derivada la  $x$  por  $a$ .

### OBTENER LAS ABCISAS EN LAS CUALES LA DERIVADA TIENE UN CIERTO VALOR

Para averiguar los valores de  $x$  para los cuales  $f'(x) = k$ , se calcula la expresión de la derivada en general  $f'(x)$ , se iguala a  $k$  y se resuelve la ecuación.

### OBTENER LAS ABCISAS DE LOS PUNTOS SINGULARES

Se llaman **puntos singulares** a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que la derivada es cero. Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros.

Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de la ecuación:  $f'(x) = 0$

### OBTENER LOS TRAMOS DONDE LA CURVA CRECE O DECRECE

Si  $f'(x) > 0$  la función es creciente y si  $f'(x) < 0$  la curva es decreciente. Por tanto, resolviendo tales inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

## 12.6 – ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

### DOMINIO

- Polinomio :  $D = \mathbb{R}$
- Cocientes :  $D = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$
- Raíces de índice par :  $D = \{\text{Lo de dentro de la raíz} \geq 0\}$
- Raíces de índice impar :  $D = \mathbb{R}$
- Logaritmos :  $D = \{\text{Lo de dentro del logaritmo} > 0\}$
- Exponenciales :  $D = \mathbb{R}$
- Trigonómicas : Seno y coseno  $D = \mathbb{R}$  ; El resto se estudia como un cociente
- Arcos :  $D = \{-1 \leq \text{Lo de dentro del arco} \leq 1\}$

### PUNTOS DE CORTE

- Con el eje OX :  $y = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow P(x_0, 0)$
- Con el eje OY :  $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow P(0, y_0)$

### SIMETRÍA

- Simétrica respecto del OY o par:  $f(-x) = f(x)$
- Simétrica respecto del Origen o impar :  $-f(-x) = f(x)$

### SIGNO DE LA FUNCIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio  $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación  $f(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en  $y = f(x)$  se obtiene el signo de la función

## ASÍNTOTAS

- Asíntotas verticales: Puntos donde la función se va al infinito:  $y \Rightarrow \infty, x = a$ 
  - Cocientes: Puntos que anulan el denominador
  - Logaritmos : Puntos que anulan lo de dentro del logaritmo
  - Aproximación a la asíntota : Calcular límites laterales
- Asíntotas horizontales : Puntos donde la  $x$  se va al infinito :  $x \Rightarrow \infty, y = b$ 
  - Cálculo :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$
  - Aproximación( en  $x = \pm 100$ ):  $\begin{cases} f(x) > b \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < b \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$
- Asíntotas oblicuas
  - Cálculo :  $y = mx + n; m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} ; n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$
  - Aproximación( en  $x = \pm 100$ ):  $\begin{cases} f(x) > \text{Asint}(x) \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < \text{Asint}(x) \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$

## MONOTONIA Y PUNTOS CRÍTICOS

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio  $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en  $y = f'(x)$  se obtiene el signo de la función
- Si  $f'(a) > 0$  la función es creciente en dicho intervalo, y si es  $< 0$  es decreciente.
- Máximo relativo :  $P(a, f(a)) : x = a$  es el punto del dominio donde la función pasa de creciente a decreciente.
- Mínimo relativo :  $P(a, f(a)) : x = a$  es el punto del dominio donde la función pasa de decreciente a creciente.

## CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio  $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en  $y = f''(x)$  se obtiene el signo de la función
- Si  $f''(a) > 0$  la función es convexa en dicho intervalo, y si es  $< 0$  es concava.
- Puntos de inflexión :  $P(a, f(a)) : x = a$  es el punto del dominio donde la función cambia la curvatura.

## TABLA DE VALORES

Dando valores a la “x” se calculan los correspondientes de la “y” sustituyendo en la función

## REPRESENTACIÓN GRÁFICA