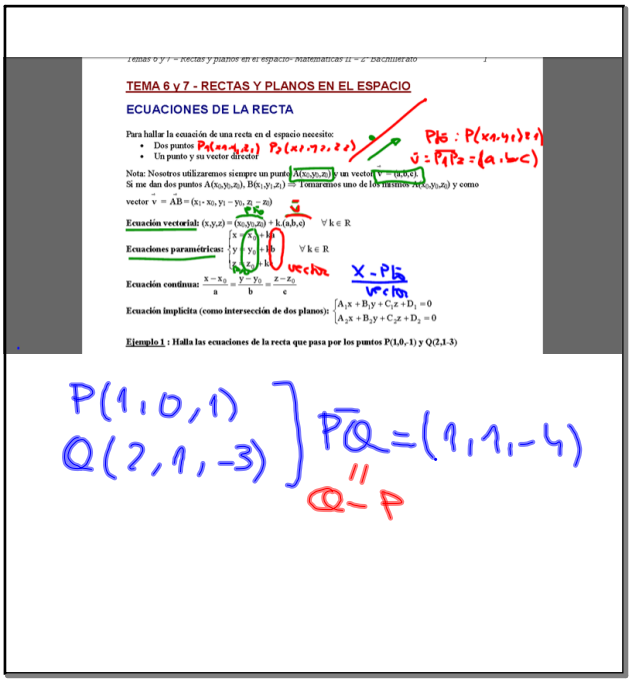


TEMA 6 y 7 - RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

ECUACIONES DE LA RECTA

Para hallar la ecuación de una recta en el espacio necesito:
- Dos puntos $P_1(x_1,y_1,z_1)$ $P_2(x_2,y_2,z_2)$
- Un punto y su vector director

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y un vector $\vec{v}=(a,b,c)$.
Si me dan dos puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ → Tomaremos uno de los puntos $A(x_0,y_0,z_0)$ y como vector $\vec{v}=\vec{AB}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+k(a,b,c)$ $\forall k\in R$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=x_0+ka \\ y=y_0+kb \\ z=z_0+kc \end{cases}$ $\forall k\in R$

Ecuación continua: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$

Ecuación implícita (como intersección de dos planos): $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

Ejemplo 1 : Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos P(1,0,-1) y Q(2,1-3)

$P(1,0,1)$
$Q(2,1,-3)$
$\Big\} \overline{PQ}=(1,1,-4)$
$Q-P$

abr 22-14:12

$P(1,0,1)$ $Q(2,1,-3)$

$r=\begin{cases} P=(1,0,1) \\ \vec{v}=\overline{PQ}=(1,1,-4) \end{cases}$

Ec. vectorial

$(x,y,z)=(1,0,1)+t(1,1,-4)$ $\forall t\in\mathbb{R}$

Ec. param

$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases}$ $\forall t\in\mathbb{R}$

Ec. cont

$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-4}$

Ec. implícita

$x-1=y$

$-4y=z-1$

$\begin{cases} x-y=1 \\ 4y+z=1 \end{cases}$

abr 22-14:16

2

$(x,y,z)=(2,0,-1)+t(1,2,3)$ $\quad P(2,0,-1)$ $\quad P_2(3,2,2)$ $\quad \vec{v}(1,2,3)$

$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=3-4\lambda \end{cases}$ $\quad P_1(1,0,3)$ $\quad P_2(2,-1,-1)$ $\quad \vec{v}(1,-1,-4)$

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{3}$ $\quad P(-1,1,-2)$ $\quad P(1,5,1)$ $\quad \vec{v}(2,4,3)$

$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$ $\quad P$ $\quad \vec{v}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right)$ $\quad \begin{matrix} x+2y+z=3 \\ -5y+z=-2 \end{matrix}$

$x=3-2\alpha+2-5\alpha$ $\quad y=\alpha$ $\quad z=-2+5\alpha$

$\begin{cases} x=5-7\alpha \\ y=\alpha \\ z=-2+5\alpha \end{cases}$

$P_1(5,0,-2)$ $\quad P_2(-2,1,3)$

$\vec{v}=(-7,1,5)$

Otro modo $\quad \vec{n}_1(1,2,1)$ $\quad \vec{n}_2(2,-1,3)$ $\quad \vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(7,-1,-5)$

abr 22-14:21

$\frac{x-2}{2}=\frac{3-y}{4}=\frac{z}{-6}$ $\quad x-x_0$ $\quad \frac{y-3}{-4}$

$P(2,3,0)$

$\vec{v}(2,-4,-6)\ \|\ (1,-2,-3)$

Los vectores se pueden simplificar, si me interesa solo la dirección

Los ptos, jamás se pueden simplificar

abr 22-14:35

ECUACIONES DE UN PLANO

Para hallar la ecuación de un plano en el espacio necesito:

- Tres puntos
- Un punto y dos vectores directores

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y dos vectores $v_1=(a_1,b_1,c_1)$, $v_2=(a_2,b_2,c_2)$
Si me dan tres puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2)$ → Tomaremos uno de los mismos $A(x_0,y_0,z_0)$

y como vectores $\vec{v}_1 = \vec{AB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$

$\vec{v}_2 = \vec{AC} = (x_2 - x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + s.(a_1,b_1,c_1) + t.(a_2,b_2,c_2)$ $\forall\, s,t \in R$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + s.a_1 + t.a_2 \\ y = y_0 + s.b_1 + t.b_2 \\ z = z_0 + s.c_1 + t.c_2 \end{cases}$ $\forall\, s,t \in R$

Ecuación implícita o general: $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

Vector normal $= \vec{n} = (A,B,C) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (Es perpendicular a los dos vectores directores)
Nota: Si conocemos el vector normal y un punto podemos hallar directamente la ecuación general del plano. Del vector normal conocemos A, B y C ; y si sustituimos el punto hallamos D.

abr 22-14:30

3) $A(0,1,-1)$ $B(2,3,-5)$ $C(1,4,3)$

π { P ∈ $A(0,1,-1)$
$\vec{v}_1 = \vec{AB} = (2,2,-4) /\!/ (1,1,-2)$
$\vec{v}_2 = \vec{AC} = (1,3,4)$

Ec. vect

$(x,y,z) = (0,1,-1) + \alpha(1,1,-2) + \beta(1,3,4)$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Ec param $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha + 3\beta \\ z = -1 - 2\alpha + 4\beta \end{cases}$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Ec. general $\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$x.10 - (y-1)6 + (z+1)2 = 0$
$10x - 6y + 6 + 2z + 2 = 0$
$10x - 6y + 2z + 8 = 0$
$\boxed{5x - 3y + z + 4 = 0} \rightarrow \vec{n}(5,-3,1)$

$A(0,1,-1)$ $\vec{AB} /\!/ (1,1,-2)$
$B(2,3,-5)$
$C(1,4,3)$ $\vec{AC} = (1,3,4)$

abr 22-14:34

$(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(4,5,6) + \mu(1,0,3)$

$P_1(1,2,3)$
P_2 . $\lambda = 1 = \mu$ $(6,7,12)$
$\lambda = 1$ $\mu = 0$ $(5,7,9)$
!

$\vec{v}_1 = (4,5,6)$
$\vec{v}_2 = (1,0,3)$
$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (15,-6,-5)$

abr 22-14:42

$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = 2\lambda - \mu \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

$P(1,0,3)$ $P_2 \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$ $(4,1,2)$ $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases} P(\ldots)$

$\vec{v}_1 = (2,2,-1)$ $\vec{v}_2 = (1,-1,0)$

$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,-4) /\!/ (1,1,4)$

abr 22-14:43

$x+2y-z=4$

$P \Rightarrow$ $y=0, z=0 \Rightarrow x=4$ $P_1(4,0,0)$

$y=1, z=0 \Rightarrow x=2$ $P_2(2,1,0)$

$\vdots$

$\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (-2,1,0)$

$\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$

$\vec{n} = (1,2,-1)$

abr 22-14:45

(5) π: $\vec{n}=(1,2,3)$

$P(2,0,4)$

$x+2y+3z+D=0$

Sustituyo el P

$2+2\cdot 0+3\cdot 4+D=0$ $D=-14$

$x+2y+3z-14=0$

abr 22-14:47