

TEMA 3 – RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

3.1 – DETERMINANTES DE ORDEN 2

3.1.1 – DEFINICIÓN: El determinante de una matriz cuadrada de orden dos es un número que se obtiene del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

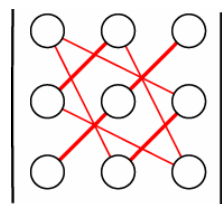
Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11$

3.2 – DETERMINANTES DE ORDEN 3

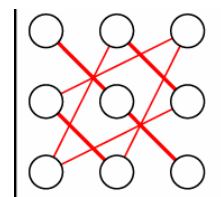
3.2.1 – DEFINICIÓN: El determinante de una matriz cuadrada de orden tres es un número que se obtiene del siguiente modo: (*Regla de Sarrus*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det } A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= [a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}] - [a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}]$$



Factores con el signo cambiado



Factores con su signo

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = [1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-3)] - [-3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 \cdot 1] =$

$$= [12 - 4 + 0] - [-24 + 12 + 0] = 8 + 12 = 20$$

3.3 – PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta: $|A| = |A^t|$

$$\left. \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 11 \end{vmatrix} = 77 + 20 = 97 \\ |A^t| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 77 + 20 = 97 \end{array} \right\} \Rightarrow |A| = |A^t|$$

2. Si un determinante tiene una línea (fila o columna) de ceros, entonces su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot 6 - 0 \cdot 7 = 0$$

3. Si permutamos dos filas (o dos columnas) de una matriz, su determinante cambia de signo.

$$\left. \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = [3 \cdot 4 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 5 \cdot 1 \cdot 8] - [5 \cdot 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 1 \cdot 9] \\ |B| = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \end{vmatrix} = [7 \cdot 4 \cdot 5 + 8 \cdot 6 \cdot 3 + 9 \cdot 1 \cdot 2] - [9 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \cdot 5] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Los sumandos son el mismo pero con el signo cambiado $\Rightarrow |B| = -|A|$

4. Si una matriz tiene dos filas (o dos columnas) iguales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 11 \cdot 4 = 0$$

5. Si multiplicamos cada elemento de una fila (o de una columna) de una matriz por un número, el determinante de esa matriz queda multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} 5.4 & 5.9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$$

Por tanto $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$ siendo “n” el orden de la matriz A. (Un α de cada fila)

6. Si una matriz tiene dos filas (o dos columnas) proporcionales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 60 & 6 \\ 70 & 7 \end{vmatrix} = 60 \cdot 7 - 6 \cdot 70 = 0$$

7. Si una fila (o columna) de una matriz es suma de dos, su determinante puede descomponerse en suma de los determinantes de dos matrices, del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

Por tanto $|A + B| \neq |A| + |B|$

8. Si a una fila (o una columna) de una matriz se le suma una combinación lineal de líneas paralelas, el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+ka \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & ka \\ c & ka \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

9. Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero (y recíprocamente)

$$(F_3 = 2F_2 - F_1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = [15 + 24 + 24] - [27 + 16 + 20] = 63 - 63 = 0$$

10. El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes:

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

Por ejemplo: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & 34 \\ -33 & 129 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = -1032 + 1122 = 90$$

$$|\mathbf{A}| = 40 - 35 = 5; \quad |\mathbf{B}| = 4 + 14 = 18 \Rightarrow |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 5 \cdot 18 = 90$$

11. El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 2 \cdot 4$$

Nota:

[1] $|\mathbf{I}| = 1$

[2] $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \Rightarrow |\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{I}| \Rightarrow |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = 1 \Rightarrow |\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$

RESUMEN PRÁCTICO:

Operaciones con determinantes:

$|0| = 0$

$|\mathbf{I}| = 1$

| Matriz triangular | = Producto de los elementos de la diagonal principal

$|\mathbf{A}^t| = |\mathbf{A}|$

$|\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$

$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$

$|\alpha \cdot \mathbf{A}| = \alpha^n \cdot |\mathbf{A}|$ (siendo “n” el orden de la matriz)

$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$

Un determinante es nulo si:

- Una línea (fila o columna) es nula.
- Dos líneas paralelas iguales
- Dos líneas paralelas proporcionales
- Una línea es combinación lineal de las líneas paralelas a ella.

Otras:

- Si intercambiamos dos líneas paralelas el determinante cambia de signo
- $$\begin{cases} F_2 = F_2 + 3F_1 \Rightarrow | | = | | \\ F_2 = 3F_2 + 4F_1 \Rightarrow | | = \frac{1}{3} | | \end{cases}$$
- $$\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

3.4 – DETERMINANTES DE ORDEN CUALQUIERA

3.4.1 – DEFINICIÓN: El determinante de una matriz n x n es el resultado de sumar todos los posibles productos de n elementos uno de cada fila y uno de cada columna, con su signo o con el signo cambiado según un cierto criterio.

3.4.2 – OTRAS DEFINICIONES:

M_{ij} = **Matriz Complementaria de a_{ij}** : Matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j

α_{ij} = **Menor complementario de a_{ij}** : Determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j

A_{ij} = **Adjunto del elemento a_{ij}** : $(-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$ (signo del elemento por el del determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j)

Menor de orden r: Determinante que se obtiene al seleccionar r filas y r columnas de la matriz

Ejemplo:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz complementaria del elemento a₂₁ :
$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Menor complementario del elemento a₂₁ :
$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6$$

Adjunto del elemento a₂₁ :
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \alpha_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -[18 - 24] = 6$$

Menores de orden 2:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \dots$$

3.4.2 – DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LINEA

Si los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados se obtienen el determinante de la matriz inicial. Se dice entonces que el determinante está desarrollado por los elementos de una línea.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} =$$

$$a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$-a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3.4.3 – MÉTODO PARA CALCULAR DETERMINANTES DE ORDEN CUALQUIERA

Desarrollando por los elementos de una fila o columna (por ejemplo, por la primera fila)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} - a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \dots \pm a_{1n} \cdot A_{1n}$$

Nota: Si conseguimos que una fila o columna tenga todos sus elementos menos uno nulos, el desarrollo será más corto.

(Para ello haremos ceros en filas o columnas, teniendo en cuenta $\begin{cases} F_2 = F_2 + 3F_1 \Rightarrow || = || \\ F_2 = 3F_2 + 4F_1 \Rightarrow || = \frac{1}{3} || \end{cases}$)

Ejemplo:

desarrollo por 1ª columna

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} - & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} =$$

• 2ª fila por (-3) + 1ª fila
• 2ª fila por (-2) + 3ª fila

desarrollo por 1ª columna

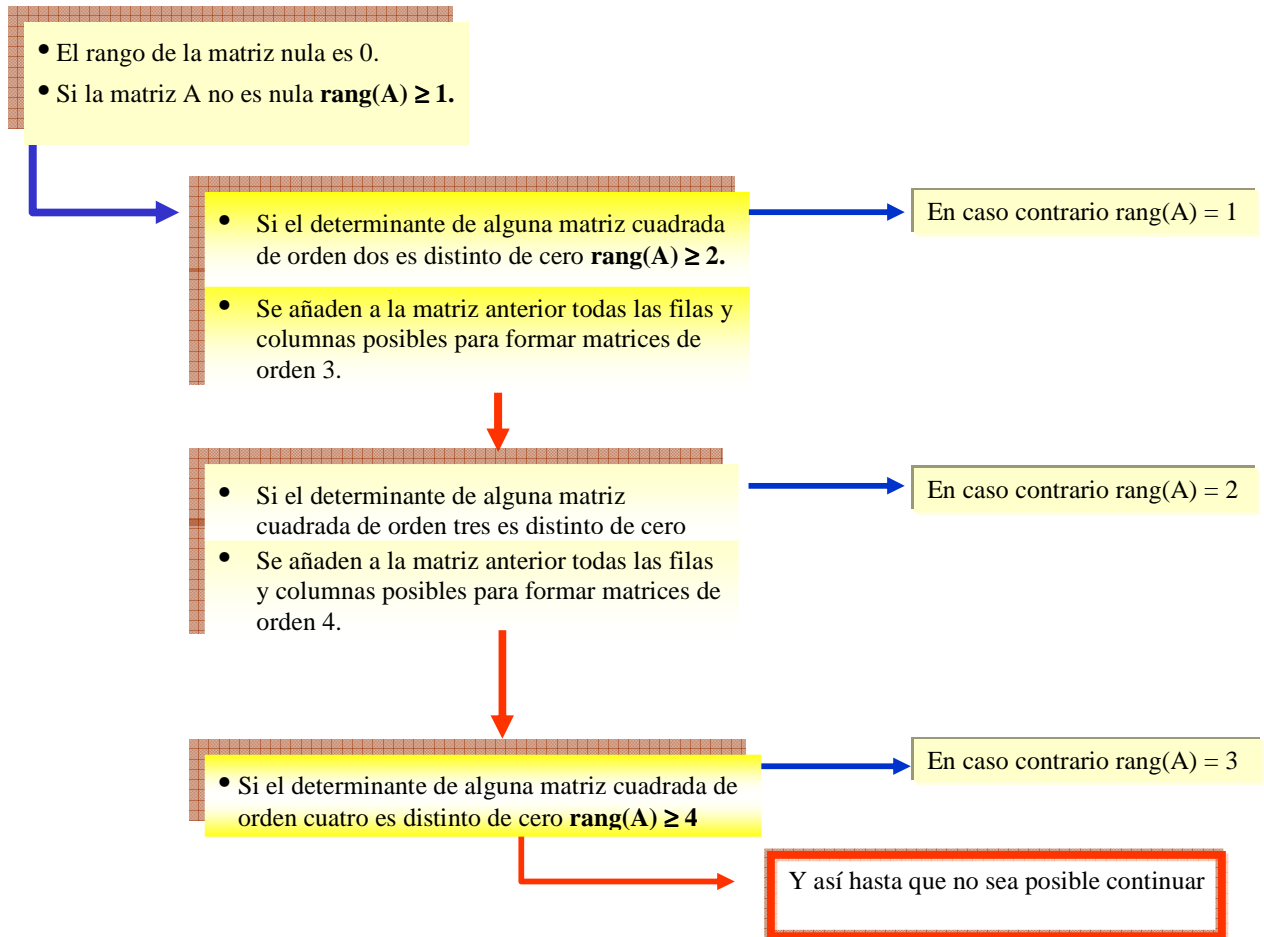
$$= (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

• 1ª fila por 1 + 3ª fila

3.5 – EL RANGO DE UNA MATRIZ A PARTIR DE SUS MENORES

El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

ALGORIMO PARA CALCULAR EL RANGO DE UNA MATRIZ



3.6 – TEOREMA DE ROUCHÉ FROBENIUS

TEOREMA: Dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Llamamos **matriz del sistema** a la matriz, A, formada por los coeficientes de las incógnitas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Y **matriz ampliada**, A', a la matriz del sistema ampliada con los términos independientes

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Si $\text{rango } A = \text{rango } A' = \text{N}^\circ \text{ Incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $\text{rango } A = \text{rango } A' \neq \text{N}^\circ \text{ Incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

Si $\text{rango } A \neq \text{rango } A' \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

3.7 – REGLA DE CRAMER

TEOREMA: Dado un sistema de ecuaciones lineales con **n ecuaciones y n incógnitas**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \dots \\ a_{n3} \end{pmatrix} x_3 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \dots + A_nx_n = B$$

Si el determinante de la matriz del sistema es distinto de cero, $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = \text{N}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{El sistema es compatible determinado}$ y por tanto tiene una única solución que se puede hallar del siguiente modo.

$$x_1 = \frac{|B \ A_2 \ A_3 \ \dots \ A_n|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_1 \ B \ A_3 \ \dots \ A_n|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_1 \ A_2 \ A_3 \ \dots \ B|}{|A|}$$

3.8 – SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Se llama **homogéneo** el sistema de ecuaciones cuyos términos independientes son todos cero.

Se caracteriza por las dos propiedades siguientes:

- Un sistema homogéneo tiene, con seguridad, la solución $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \dots$. Por eso se le llama **solución trivial**.
- Para que un sistema homogéneo tenga otras soluciones, es necesario y suficiente que:
Rango $A < \text{N}^\circ \text{ Incógnitas}$.

3.9 – DISCUSIÓN DE SISTEMAS CON PARÁMETRO.

Si el sistema tiene el **mismo número de ecuaciones que de incógnitas**.

- Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y se iguala a cero.
- Se resuelve la ecuación
- Un caso más que valores del parámetro del apartado anterior.
 - o CASO I: Si $a \in \mathbb{R} - \{a_1, a_2, \dots\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado y se resuelve por Cramer (Queda el resultado en función del parámetro).
 - o CASO II: $a = a_1 \Rightarrow$ Se sustituye la “a” por el valor de “a₁” y se resuelve aplicando el teorema de Rouché Frobenius (Se hace Gauss y se estudian los rangos)

Si el sistema tiene **distinto número de ecuaciones que de incógnitas**, se resuelve por Rouché-Frobenius (Gauss)

- Se ordenan las ecuaciones llevando el parámetro lo más abajo y a la derecha posible.
- Se hacen ceros debajo de la diagonal principal (si hay un rectángulo de ceros se continua haciendo ceros)
- Se igualan, por separado, los elementos de la diagonal a cero.
- Un caso más que valores del parámetro y se estudian los rangos.

3.10 – CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

- La matriz cuadrada A tiene inversa si y sólo si $|A| \neq 0$

- Dada la matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A y se representa adj(A), a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto A_{ij}.

Ejemplo: Dada la matriz $(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, su adjunta sería:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Se cumple que si $|A| \neq 0$ entonces la matriz inversa A^{-1} es igual a:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A^t) = \frac{1}{|A|} [\text{adj}(A)]^t$$

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, pretendemos encontrar su inversa:

La matriz A tiene inversa ya que $\det(A) = -2 \neq 0$

Ya hemos visto que: $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Entonces: $[\text{adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Por lo tanto: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{adj}(A)]^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$